Coppie di Triangoli quasi congruenti, Triangoli continui, Spirali logaritmiche

Giovanni Vincenzi
Università di Salerno
vincenzi@unisa.it

31 Ottobre 2015, Gioia del Colle

Una questione elementare

Ci sono alcune questioni elementari che non sono molto note. Ad esempio siano $\mathcal{T} = (a, b, c)$ e $\mathcal{T}' = (a', b', c')$ due triangoli di lati rispettivamente $a, b, c \quad$ e $\quad a', b', c'$. Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sono simili e a è congruo ad a' e b è congruo a b' allora possiamo concludere che i triangoli $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sono congrui? Equivalentemente possiamo formulare questo quesito come segue:

"Due triangoli che hanno 5 elementi congruenti sono necessariamente congruenti?"

Esempi di coppie di triangoli quasi congruenti

Come mostrano i seguenti esempi la risposta è negativa.

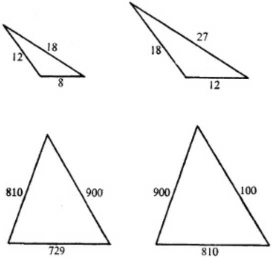


Figura: Esempi di triangoli quasi congruenti

Coppie di triangoli di questo tipo si dicono *quasi congruenti*, e sono state oggetto di vari studi (vedi ad esempio [2] [5] and [6]).

Siano u e r numeri reali positivi. Una successione numerica del tipo $ur, ur^2, ur^3, \ldots ur^n$ si chiama *progressione geometrica di ragione r*.

Si osservi che se $\mathcal{T} = (a, b, c)$ e $\mathcal{T}' = (a', b', c')$ sono quasi congruenti, allora i loro lati sono in progressione geometrica.

Nel primo esempio precedente, valutando i rapporti dei lati abbiamo $18 : 12 = 12 : 8$ e $27 : 18 = 18 : 12$ questi rapporti valgono tutti $3/2$.
Posto $r = 3/2$ e $u = 16/3$ abbiamo la misura dei lati
$8 = u \cdot r = 16/3 \cdot 3/2$,
$12 = u \cdot r^2 = 16/3 \cdot 9/4$,
$18 = u \cdot r^3 = 16/3 \cdot 27/8$,
$27 = u \cdot r^4 = 16/3 \cdot 81/16$.

Triangoli continui

Assegnato un triangolo $\mathcal{T}$, possiamo affermare che esiste un triangolo $\mathcal{T}'$ tale che $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ siano quasi congruenti?

Nella maggior parte dei casi la risposta è negativa: essa dipende dalla scelta del triangolo $\mathcal{T}$!
Un triangolo per cui il quesito precedente ha risposta positiva lo diremo *triangolo continuo* (vedi [6]).
Chiaramente se un triangolo $\mathcal{T}$ è continuo, ogni altro triangolo $\mathcal{T}'$ che sia quasi congruente a $\mathcal{T}$ sarà anch'esso continuo; in particolare sarà simile a $\mathcal{T}$.

Triangoli di Keplero

Una notevole classe di esempi di triangoli continui è fornita dalla classe dei *Triangoli retti Aurei (Golden right triangles)* anche detti *Triangoli di Keplero* . Essi sono definiti come quei triangoli in cui la lunghezza dei lati soddisfa la seguente proporzione:

$$Ipotenusa : cateto \;\; maggiore = cateto \;\; maggiore : cateto \;\; minore.$$

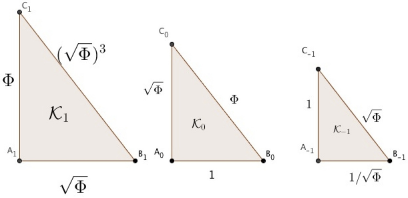
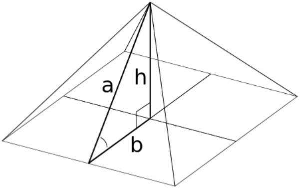


Figura: Esempi di Triangoli di Keplero



,

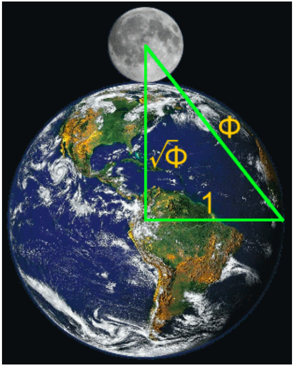
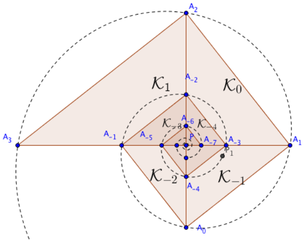


Figura: 1) Misure approssimate della piramide di Giza; 2) Terra-Luna-Φ



,

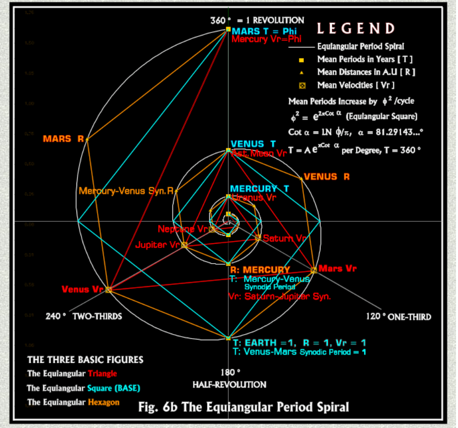


Figura: *La Spira solaris* $\quad \rho = \Phi^{\theta/\pi}$, *punto iniziale (1,0).*

Caratterizzazione dei triangoli continui

Poiché i triangoli di Keplero descrivono la Spira solaris, ci si chiede se altri triangoli possono essere utilizzati per descrivere altre spirali logaritmiche. Chiaramente i candidati più idonei sono i triangoli continui. A tal scopo è opportuno richiamare alcune loro proprietà (vedi [5] Teorema 1, e [6] page 22):

Theorem

Sia $\mathcal{T} = (a, b, c)$ un triangolo. Se $\mathcal{T}$ è continuo, allora i lati a, b, c sono in progressione geometrica di ragione appartenente a $(1/\Phi, \Phi) \setminus \{1\}$. Viceversa per ogni progressione geometrica ur, ur^2, ur^3, dove u è un numero reale positivo e la "ragione" r giace in $(1/\Phi, \Phi) \setminus \{1\}$, il triangolo (ur, ur^2, ur^3) è continuo.

Osservazioni sui triangoli continui

1) Si verifica facilmente che se $r \in (1/\Phi, 1/\sqrt{\Phi}) \cup (\sqrt{\Phi}, \Phi)$ i triangoli corrispondenti sono ottusi; e se $r \in (1/\sqrt{\Phi}, \sqrt{\Phi}) \setminus \{1\}$ i triangoli corrispondenti sono acuti. Inoltre se r è esattamente $\sqrt{\Phi}$ (oppure $1/\sqrt{\Phi}$) abbiamo che (ur, ur^2, ur^3) definisce un triangolo di Keplero, per ogni positivo u.

2) Se $1 \neq r \in (1/\Phi, \Phi)$, allora per ogni intero n possiamo considerare il triangolo continuo $\mathcal{T}_n = (r^n, r^{n+1}, r^{n+2})$. La scrittura "$\mathcal{T}_n < \mathcal{T}_m$" indica che l'area di $\mathcal{T}_n$ è minore dell'area di $\mathcal{T}_m$.

Catene di triangoli continui

Chiaramente per ogni $r \in (1/\Phi, \Phi)$ gli insiemi di triangoli continui
$\{\mathcal{T}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{(r^n, r^{n+1}, r^{n+2})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e
$\{\mathcal{T}'_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{((\frac{1}{r})^n, (\frac{1}{r})^{n+1}, (\frac{1}{r})^{n+2})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ coincidono.
D'altra parte è opportuno osservare che queste due catene di triangoli continui presentano un comportamento "duale":
se $1 < r$, allora la catena $(\mathcal{T}_n)$ è ascendente, mentre $(\mathcal{T}'_n)$ è discendente;
se $r < 1$, allora la catena $(\mathcal{T}_n)$ è discendente, mentre $(\mathcal{T}'_n)$ è ascendente.

per questo motivo è possibile restringere lo studio di queste catene al caso in cui $r \in (1, \Phi)$, e quindi considereremo la catena ascendente di triangoli $(\mathcal{T}_n)$.

Sia $r \in (1, \Phi)$, Per ogni intero n poniamo $A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}$, come vertici di $\mathcal{T}_n$: $\quad \mathcal{T}_n = (r^n, r^{n+1}, r^{n+2}) = (A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3})$.
Inoltre, fissato un intero positivo k possiamo considerare la (sotto)catena $\{\mathcal{T}_{nk}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Partendo da $\mathcal{T}_0 = (1, r^1, r^2) = (A_1, A_2, A_3)$, possiamo considerare i triangoli $\mathcal{T}_k = (r^k, r^{k+1}, r^{k+2}) = (A_3, A_4, A_5)$ e $\mathcal{T}_{-k} = (r^{-k}, r^{-k+1}, r^{-k+2}) = (A_1, A_0, A_{-1})$. Utilizzando la loro similitudine, possiamo effettuare la seguente costruzione (vedi figura 2):

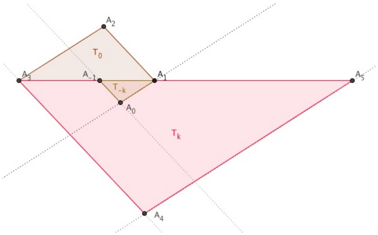


Figura: La costruzione della (r, k)-spirale discretizzata

Iterando questa costruzione otteniamo una poligonale a forma di spirale, $\mathcal{P}_{r,k}$, che chiameremo (r, k)-*spirale discretizzata*.

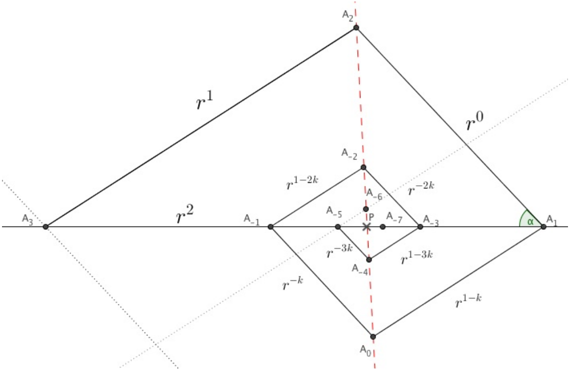


Figura: Il polo di una (r, k)-spirale discretizzata

Per questa Spirale sussiste il seguente risultato (vedi [1, Lemma 3.1]):

3, Le (r,k)-Spirali discrete

Lemma

Sia $r \in (1, \Phi)$ *e* k *un intero positivo. Sia* $\mathcal{P}_{r,k}$ *la* (r,k)*-spirale discretizzata. Allora tutti i vertici* A_{2n}*, con indice pari sono allineati su una retta* s*. In particolare, posto* P *l'intersezione tra* s *e la retta contenente tutti i vertici dispari* A_{2n+1}*, risulta che ogni* A_{1-4n} *giace a destra di* P *e ogni* A_{3-4n} *giace a sinistra di* P*, per ogni intero* n*. Inoltre*

(a) $$|\overline{A_3P}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{A_{3-4n}A_{3-4(n+1)}}| = \frac{r^{2+k}}{r^k+1};$$

(b) $$|\overline{A_1P}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{A_{1-4n}A_{1-4(n+1)}}| = \frac{r^{2}}{r^k+1};$$

(c) $$|\overline{A_2P}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{A_{2-4n}A_{2-4(n+1)}}| = \frac{\sqrt{r^{2k}+r^k-r^{k+4}+r^{k+2}+r^2}}{(r^k+1)};$$

(d) $$|\overline{A_0P}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{A_{4n}A_{-4(n+1)}}| = \frac{\sqrt{r^{2k}+r^k-r^{k+4}+r^{k+2}+r^2}}{r^k(r^k+1)}.$$

controesempio

Chiaramente, possiamo tentare di costruire una “spirale discretizzara” a partire da un qualunque triangolo. Ma in generale il risultato precedente non vale (see figure 7).

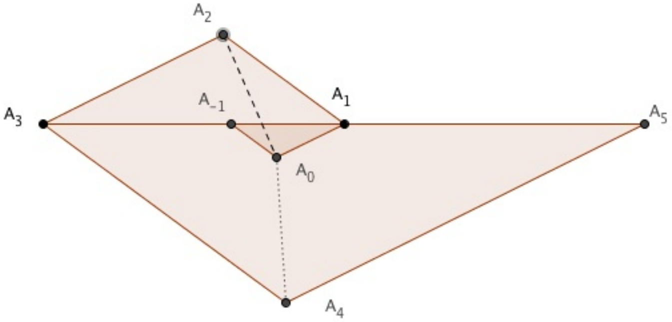


Figura: Costruzione con una catena di triangoli non continui

Le spirali logaritmiche

Una *spirale logaritmica* è una curva piana la cui equazione in coordinate polari (ρ, θ) è $\rho = te^{(h\theta)}$. Il termine h è un numero positivo chiamato *costante di crescita della spirale* , e t è la *costante della spirale* che dipende dalla scelta della condizione iniziale $\theta = 0$. Rileviamo che l'incremento di θ è inteso in senso antiorario. Una rappresentazione cartesiana di una spirale logaritmica è la seguente:

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) cos(\theta) = te^{(h\theta)} cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta) sin(\theta) = te^{(h\theta)} sen(\theta), \end{cases} \tag{1}$$

La distanza dall'origine (Polo della spirale) del punto $(x(\theta), y(\theta))$ cresce esponenzialmente al crescere di θ.

Spirali logaritmiche Famose

La più celebre tra le spirali logaritmiche è la *spirale d'oro* (Golden Spiral) la cui equazione è

$$\rho = e^{(2/\pi)\lg(\Phi)\theta} = \Phi^{2\theta/\pi} \quad \text{con } \textit{punto iniziale (1,0)}.$$

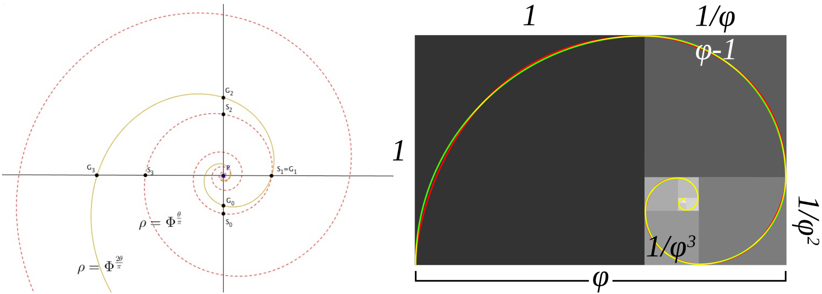


Figura: A sinistra Spira solaris (linea rossa tratteggiata), e la Spirale d'oro (linea color oro); a destra la Spirale d'oro e Qulla di Fibonacci

Spirali logaritmiche

Notiamo che la costante di crescita è $(2/\pi)\,\mathrm{lg}(\Phi)$. Inoltre, per $\theta = 0$ abbiamo $\rho = 1$, per $\theta = \pi/2$ abbiamo $\rho = \Phi$. In generale si vede facilmente che la spirale d'oro si allontana dall'origine di un fattore Φ per ogni quarto di giro (in senso antiorario); pertanto
" Φ^4 " da la misura del *fattore di crescita* di questa spirale dopo un giro completo ottono all'origine.
In generale se $\mathcal{S}$ è una spirale di equazione $\rho = te^{(1/\pi)\,\mathrm{lg}(r^k)\theta} = tr^{k\theta/\pi}$, dove t dipende dal punto iniziale $(\rho(0), 0)$, il suo fattore di crescita è r^{2k}.
Un' altra celebre spirale logaritmica è la *Spirale di Fidia* (*Pheidia Spiral*), la cui equazione è:

$$\rho = e^{(1/2\pi)\,\mathrm{lg}(\Phi)\theta} = \Phi^{\theta/2\pi}, \quad \text{Con punto iniziale (1,0).}$$

Notiamo che la Pheidia Spirals, Spira Solaris, and Golden Spiral hanno rispettivamente le seguenti "crescite": Φ, Φ^2, Φ^4.

Discretizzazione delle spirali logaritmiche

Quello che si può provare è che ogni (r, k)-spirale discretizzata è connessa ad una coppia di spirali logaritmiche $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(r, k)$ e $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2(r, k)$. Precisamente (vedi [1, Teorema 4.1])

Theorem

Sia $r \in (1, \Phi)$, e k un intero positivo. Allora tutti i vertici A_{1-2n} (indiciati da numeri dispari) della (r, k)-spirale discretizzata $\mathcal{P}_{r,k}$, giacciono su una spirale logaritmica $\mathcal{S}_1$ di crescita r^{2k} e con punto iniziale $A_1 = (\frac{r^2}{r^k+1}, 0)$, e tutti i vertici "pari" giacciono su una spirale logaritmica $\mathcal{S}_2$ con lo stesso fattore di crescita r^{2k} e con un opportuno punto iniziale H dipendente da r e da k.

Descrizione delle spirali logaritmiche con triangoli continui

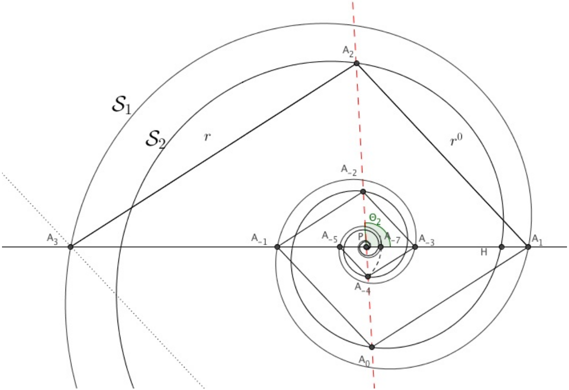


Figura: Spirali logaritmiche associate ad una (r, k)-spirale discretizzata

Spirali ellittiche logaritmiche

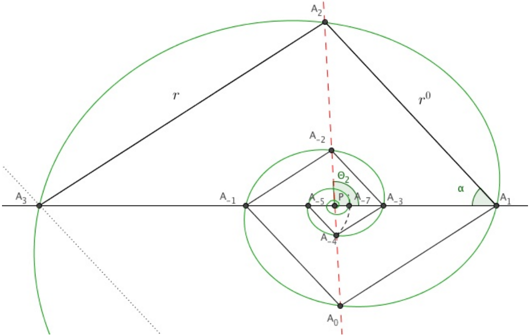


Figura: Elliptic logarithmic spiral approximately through all vertices of an assigned (1.35, 2)-male spiral

Bibliografia

G. Anatriello and G. Vincenzi. *Logarithic spirals and continue triangles.* Journal of Computational and Applied Mathematics. (2016); 296C:127–137. Doi 10.1016/j.cam.2015.09.004

G. Anatriello and G. Vincenzi. *Tribonacci-like sequences and generalized Pascal's triangles* . Int J Math Educ in Sci Technol. (2014);45(8):1220–1232.

R.C. Archibald. *Note on the logarithmic spiral, golden section and the fibonacci series. Note V, Dynamic symmetry*. New Haven: Yale University Press; 1920.

D'Arcy Wenthworth Thompson. *On Growth and form*. New York: Cambridge University Press; 1992.

C. Baumgarten and G. Farin. *Approximation of logarithmic spirals*. Computer Aided Geometric Design. (1997);14 (6):515–532.

J. T. F. Briggs. *Almost congruent triangles with integral sides*. The Mathematics Teacher. (1997);70(3):253–257.

B. J. Mc. Cartin. *Mysteries of equilateral triangle*. Kettering: Hikari; 2010.

Bibliografia

- R.J. Cripps, M.Z. Hussain and S. Zhu. *Smooth polynomial approximation of spiral arcs*. Journal of Computational and Applied Mathematics. (2010);233(9):2227–2234.
- F. Combes, P. Boissè, A. Mazure, A. Blanchard *Galaxies and Cosmology*. New York: Springer; 2002.
- T. A. Cook. *The curves of the life*. New York: Dover; 1979.
- E. P. Doolan. *A Sacred Geometry of the Equilateral Triangle*. Int J Math Educ in Sci Technol. (2008);39(5):601–629.
- A. Fiorenza and G. Vincenzi. *Limit of ratio of consecutive terms for general order-k linear homogeneous recurrences with constant coefficients*. Chaos, Solitons & Fractals. (2011);44(1):145–152.
- A. Fiorenza and G. Vincenzi. *From Fibonacci Sequence to the Golden Ratio*, J. Math. 2013, Art. ID 204674, 3pp.
- P. Ghosh J. Kumar. *Seismic Bearing Capacity of Strip Footings Adjacent to Slopes Using the Upper Bound Limit Analysis*. Electronic Journal of Geotechnical Engineering (EJGE), 10 C (2005);

Bibliografia

- C. Gorini. *Geometry at works- Papers in applied Geometry*. MAA (2000); Notes Number 53.
- F. Laudano *Questioni sui criteri di congruenza*. XXX (2001);1:XX–XX.
- Utpal Mukhopadhyay. *Logarithmic spiral – A splendid curve*. Resonance. (2004);9(11):39–45.
- R. Herz-Fischer. *The Shape of the Great Pyramid*. Waterloo (Ontario): Wilfrid Laurier University Press; 2000.
- R. T. Jones and B. B. Peterson. *Almost congruent triangles*. Math Magazine. (1974);47(4):180–189.
- M. Pennisi. *Triangles et Moyennes*. Metematique et Pedagogie; (1994);99:21–26.
- J.C. Perez. *Chaos DNA and Neuro-computers: a golden link / The hidden language of genes, global language and ordre in the human genome*. Speculations in Science and Technology. (1991);14(4): 336–346.
- Piazzi Smith. *The Great Pyramid*. New York: Bell; 1978.
- S. K. Saha. *Aperture Synthesis: Methods and Applications to Optical Astronomy*. Springer Science & Business Media; 2010.
- P. Szalapaj. *Contemporary Architecture and the Digital Design Process*. New York: Routledge-Architectural press; 2005.
- R. Takaki and N. Ueda. *Analysis of spirals Curves in Traditional Cultures*. Forum. (2007);22: 133-139.

Bibliografia

S. Siani and G. Vincenzi. *Fibonacci-like sequences and generalized Pascal's triangles* . Int J Math Educ in Sci Technol. (2014);45(4):609-614.

www.spirasolaris.ca

G. Vitiello. *Fractals, coherent states and self-similarity induced noncommutative geometry* . Physics Letters A. (2012);376(37):2527–2532.

www.greatbuildings.com/building/Nathaniel_Russell_House.html

http://www.dyscario.com/design/beautiful-and-unique-design-of-spiral-house-in-spain-madrid.html

https://www.behance.net/gallery/4446217/elliptical